



متوسط تشریحی ۱۳۹۸

①

صفحه  $P_1$  کره‌ای به شعاع ۵ واحد را به گونه‌ای قطع می‌کند که سطح مقطع حاصل حداکثر مساحت را داشته باشد. اگر صفحه  $P_2$  که موازی صفحه  $P_1$  است، به فاصله ۳ واحد از  $P_1$ ، کره را قطع کند، مساحت سطح مقطع فوق چند واحد مربع است؟

ساده نهایی ۱۴۰۰

②

در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی یا بیش‌ترین مساحت را بیابید.

ساده تشریحی ۱۳۹۸

③

در یک بیضی، قطر بزرگ آن ۳ برابر قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

ساده نهایی ۱۴۰۰

④

کانون‌های یک بیضی نقاط  $(1, 3)$  و  $(1, -5)$  است  
الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.  
ب) اگر  $a = 6$  باشد، اندازه قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازه نصف قطر بزرگ بیضی است).

ساده تشریحی ۱۴۰۰

⑤

در بیضی با خروج از مرکز  $\frac{1}{3}$  و طول قطر کوچک ۱۲ واحد، مجموع فواصل نقطه‌ای روی بیضی از دو کانون کدام است؟

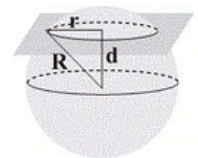
متوسط

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۱

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



همان‌طور که از شکل برمی‌آید بین شعاع کره ( $R$ ) و شعاع دایره کوچک ( $r$ ) و فاصله دو صفحه ( $d$ ) رابطه فیثاغورس برقرار است.

$$R^2 = d^2 + r^2 \Rightarrow 5^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow r = 4$$

پس مساحت سطح مقطع کوچک‌تر برابر است با:

$$S = \pi r^2 \Rightarrow S = 16\pi$$

ساده

نهایی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۲

$$y = 7 - x \rightarrow s = (y)(x) = 7x - x^2 \rightarrow s'(x) = 7 - 2x = 0$$

$$\rightarrow x = 3/2, y = 3/2$$

ساده

تشریحی ۱۳۹۸

گزینه درست: null

سوال ۳

اگر قطر بزرگ بیضی را با  $2a$  و قطر کوچک آن را با  $2b$  نشان دهیم، داریم:

$$2a = 3 \times 2b \Rightarrow a = 3b \Rightarrow a^2 = 9b^2$$

با توجه به آن که در بیضی رابطه  $a^2 = b^2 + c^2$  برقرار است، پس:

$$\Rightarrow a^2 = 9(a^2 - c^2) \Rightarrow 8a^2 = 9c^2$$

خروج از مرکز بیضی به صورت  $e = \frac{c}{a}$  تعریف می‌شود:

$$\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ساده

نهایی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۴

(الف)

$$O \begin{cases} \frac{1+1}{2} = 1 \\ \frac{3-5}{2} = -1 \end{cases} \quad \text{مرکز } FF' = |3 - (-5)| = 8 = 2C \rightarrow C = 4$$

(ب)

$$b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20 \rightarrow b = \sqrt{20} \Rightarrow BB' = 2\sqrt{20}$$

ساده

تشریحی ۱۴۰۰

گزینه درست: null

سوال ۵

مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر با طول قطر بزرگ بیضی یعنی  $2a$  است. طبق اطلاعات مسأله، خروج از مرکز برابر با  $\frac{1}{3}$  است:

$$e = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow c = \frac{a}{3}$$

همچنین قطر کوچک  $2b = 12$  است، پس  $b = 6$ . بنابراین:

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{c = \frac{a}{3}} a^2 = 36 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{3a^2}{4} = 36 \Rightarrow a^2 = 48$$

$$\xrightarrow{a > 0} a = 4\sqrt{3} \Rightarrow 2a = 8\sqrt{3}$$